ω-Limesmengen von Lösungen eindimensionaler Wärmeleitungsgleichungen mit periodischer Zeitabhängigkeit

Diplomarbeit
von
Björn Sandstede

Betreuer :
Priv. Doz. Dr. Bernold Fiedler

Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik
November 1989

Inhaltsverzeichnis :

0. Kapitel	Einleitung	3
I. Kapitel	Das Setting	7
II. Kapitel	Gemischte Randbedingungen und periodische mit O(2)-Symmetrie	13
III. Kapitel	Periodische Randbedingungen mit SO(2)-Symmetrie	21
Literaturverzeichnis		29

0. Einleitung :

Die Formulierung von partiellen Differentialgleichungen als Halbflüsse, sofern möglich, ist oft sinnvoll, wenn das dynamische Verhalten der Lösungen interessiert. Wohl die einfachsten Beispiele für Halbflüsse, die auf diese Art von partiellen Differentialgleichungen erzeugt werden, liefern skalare Wärmeleitungsgleichungen :

(0.1) $$u_t = u_{xx} + f(x,u,u_x) \qquad x \in (0,1)$$

mit geeigneten Randbedingungen an u, wobei f hinreichend glatt sei.

Man ist insbesondere an der Asymptotik der Lösungen interessiert, d.h., am Verhalten der Lösungen für große t.
Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Fluß für große Zeiten zu beschreiben. Ein globales Konzept sind Attraktoren oder Inertialmannigfaltigkeiten für dissipative Systeme. Hier sind die Ergebnisse speziell für skalare Reaktion Diffusion Glg. sehr konkret (siehe [Jolly]).
Das Verhalten einzelner Lösungen dagegen wird durch ihre ω-Limesmenge beschrieben

$$\omega(u) := \{ v \,/\, \exists\, t_n \to \infty \;\text{ mit }\; u(t_n) \to v \}.$$

Dann möchte man wissen, wie kompliziert diese Limesmengen für Orbits des Flusses sein können. □

Für Gleichung (0.1) mit gemischten und periodischen Randbedingungen sind folgende Resultate über die Gestalt der möglichen ω-Limesmengen von Lösungen u(•) erzielt worden :
(für Einzelheiten an die Differenzierbarkeitseigenschaften von f und die genauen Voraussetzungen siehe die Originalarbeiten)

(i) gemischte, lineare Randbedingungen :

$f = f(x,u,u_x)$
$\omega(u) = \{ e \}$ e stationär
[Zelenyak], [Matano 1]

(ii) periodische Randbedingungen :

$f = f(u)$ O(2)-Symmetrie	$f = f(u,u_x)$ SO(2)-Symmetrie	$f = f(x,u,u_x)$
$\omega(u) = \{ e \}$ e stationär	$\omega(u) = \gamma(p)$ $p(\cdot)$ rotating wave oder $\omega(u) \subset \{e(a + \cdot) / a \in S^1\}$ e stationär	$\omega(u) = \gamma(p)$ $\gamma(p)$ periodisch oder $\alpha(v), \omega(v) \subset \epsilon \ \forall v \in \omega(u)$ (Poincare-Bendixson)
[Matano 2]	[Massatt], [Matano 2]	[Fiedler & Mallet-Paret]

(Dabei bezeichne ϵ die Menge der stationären Orbits)

Zum Beweis von (i) wurde von Zelenyak gezeigt, daß die Gleichung (0.1) mit gemischten Randbedingungen eine Ljapunov Funktion besitzt, d.h., der Fluß gradientenähnlich ist.
Mit periodischen Bedingungen mußte man andere Methoden finden. Matano benutzte die "Nullstellenanzahl" von Lösungen von (0.1) und zeigte mit Hilfe des Maximum - prinzips, daß die Anzahl der Nullstellen der Differenz von Lösungen für wachsende t nur fallen konnte. Diesselbe Methode wurde auch von den anderen Autoren verwendet.

□

In dieser Arbeit wird nun das gleiche Problem für nichtautonome eindimensionale Wärmeleitungsgleichungen mit periodischer Zeitabhängigkeit untersucht :

(0.2) $$u_t = u_{xx} + f(t,x,u,u_x) \qquad x \in (0,1)$$

mit geeigneten Randbedingungen an u,
wobei wieder f hinreichend glatt sei und f periodisch in t ist (o.B.d.A. mit Periode 1) :

$$f(t + 1,x,u,u_x) = f(t,x,u,u_x) \qquad \forall\, t$$ □

Für die Untersuchung dieser zeitabhängigen Gleichung wird es sich als zweckmäßig erweisen, nicht direkt Glg. (0.2) zu betrachten, sondern die zugehörige Poincare oder Periodenabbildung :

$$\rho : \quad u_0 \mapsto u(1)$$

Man erhält dann folgende Ergebnisse (siehe Kapitel I, Satz 1.1 und 1.2),
wobei sich jetzt ω_p auf die ω-Limesmenge bzgl. der Periodenabbildung ρ bezieht :

(i) gemischte, lineare Randbedingungen :

$f = f(t,x,u,u_x)$
$\omega_P(u) = \{ e \}$ e stationär

(ii) periodische Randbedingungen :

$f = f(u)$ O(2)-Symmetrie	$f = f(u,u_x)$ SO(2)-Symmetrie
$\omega_P(u) = \{ e \}$ e stationär	$\omega_P(u) \subset \{ v(a + \cdot) / a \in S^1 \}$ für ein $v \in \omega_P(u)$ und $\rho^n(w)(x) = w(x + n \cdot r)$ für alle $w \in \omega_P(u)$ und ein $r \in S^1$

("stationär" bedeutet stationär bzgl. der Periodenabbildung ρ)

Auch hier wird das wesentliche Hilfsmittel beim Beweis die "Nullstellenanzahl" der Differenz von Lösungen sein. □

Ich möchte Priv. Doz. Dr. Bernold Fiedler für das interessante Thema und besonders für die hervorragende Betreuung danken.
Weiter danke ich meinen Freunden Peter und Stefan, dank denen die Straßen von Heidelberg wohl schmutzig bleiben werden. □

Während des Tippens dieser Arbeit fand ich den Artikel [Chen & Matano].
Dort werden ebenfalls die ω-Limesmengen zeitabhängiger Wärmeleitungsgleichungen untersucht, allerdings nur in der speziellen Form :

(0.3) $$u_t = u_{xx} + f(t,u) \qquad x \in (0,1)$$

mit Dirichlet, Neumann und periodischen Randbedingungen an u,
wobei neben weiteren Voraussetzungen f periodisch sei.

[Chen & Matano] erhalten dort ebenfalls, daß die ω-Limesmenge einer beschränkten Lösung aus genau einem periodischen Orbit besteht. Außerdem zeigen sie gewisse räumliche Symmetrieeigenschaften dieser periodischen Orbits (die Isotropiegruppe enthält eine Rotationsuntergruppe und eine Spiegelung).

Für periodische Randbedingungen folgen diese Eigenschaften auch aus Satz 1.2 und Lemma 3.1. Bei den anderen Randbedingungen kann ich keine Symmetrieeigenschaften nachweisen.
Andererseits kann bei Dirichlet und Neumann Bedingungen f zusätzlich noch von x und u_x abhängig sein und die anderen Voraussetzungen an f aus
[Chen & Matano] brauchen nicht erfüllt zu sein (siehe Satz 1.1). □

I. Setting

§1 Setting

Wir betrachten im weiteren die folgende Gleichung :

(1.1) $\quad u_t = u_{xx} + f(\theta,x,u,u_x) \qquad x \in (0,1)$

$\theta_t = 1 \qquad \theta \in S^1$

$f : S^1 \times [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ periodisch in θ mit Periode 1,
mit den Randbedingungen

(P) periodisch : $\quad u(t,0) = u(t,1) \quad u_x(t,0) = u_x(t,1) \quad \forall\, t > 0$

oder äquivalent $\quad x \in S^1 = \mathbb{R}/_{[0,1]}$

(G) gemischt : $\quad \alpha_0 \cdot u(t,0) + \beta_0 \cdot u_x(t,0) = 0 \qquad \alpha_1 \cdot u(t,1) + \beta_1 \cdot u_x(t,1) = 0$

$\forall\, t > 0 \qquad$ wobei $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ für $i = 0,1$

f sei C^2 bei periodischen und Dirichlet, und analytisch bei gemischten und Neumann Randbedingungen. □

(1.1) erzeugt auf $S^1 \times X$ einen lokalen Halbfluß (siehe [Henry : chapt.4]). Dabei erzeugt der Halbfluß zu U_0 aus $S^1 \times X$ die Lösung $U(t)$ mit $U(0) = U_0$, wobei $X = H^2(S^1)$ bei periodischen und $X = \{u \in H^2(I) \,/\, u$ erfüllt (1.1)(G)$\}$ bei den anderen Randbedingungen sei.
Statt des Flusses wird im folgenden meist die Perioden- oder Poincare Abbildung P_θ benutzt : $\quad P_\theta : \quad \{\theta\} \times X \to \{\theta\} \times X \qquad (\theta,u_0) \mapsto (\theta,u(1))$

Konvention :
Ich werde immer S^1 mit $\mathbb{R}/_{[0,1]}$ identifizieren und beide Beschreibungen benutzen.
Es bezeichne im folgenden stets $(\theta(t),u(t)) =: U(t)$ eine Lösung von (1.1).
Ferner sei $X_\theta := \{\theta\} \times X$ und je nach Randbedingung $\Omega = S^1$ resp. $[0,1]$.

Mit diesen Bezeichnungen schreibt sich die Periodenabbildung :

$P_\theta : \quad X_\theta \to X_\theta \qquad U_0 \mapsto U(1) \quad$ bzw. $\quad u_0 \mapsto u(1)$

Die Elemente aus X_θ werden oft mit ihrer zweiten Komponente identifiziert, wenn θ festgehalten und nur die Poincare-Abbildung betrachtet wird. □

Definitionen :

Es sei $U(\cdot)$ eine für alle $t > 0$ definierte Lösung von (1.1). Dann definiert man :

$$\gamma^+(\theta_0,u_0) = \gamma^+(U_0) := \{ U(t) / t \geq 0 \} \subset S^1 \times X \quad : \text{Vorwärtsorbit von } U_0.$$

Wenn eine Rückwärtsfortsetzung der Lösung existiert, setzt man :

$$\gamma(U_0) := \{ U(t) / t \in \mathbb{R} \} \subset S^1 \times X \quad : \text{Orbit von } U_0 = (\theta_0,u_0).$$

Falls $U(t)$ für alle $t > 0$ existiert, kann die ω-Limesmenge von U_0 definiert werden :

$$\omega(\theta_0,u_0) = \omega(U_0) := \{ V \in X / \exists\, t_n \to \infty \text{ mit } U(t_n) \to V \} \subset S^1 \times X.$$

Entsprechend sei für die Poincare-Abbildung :

$$\gamma_\theta^+(u_0) = \gamma_\theta^+(U_0) := \{ u(n) / n \in \mathbb{N}_0 \} \subset X_\theta \quad : \text{Vorwärtsorbit von } u_0 \text{ bzgl. der Periodenabbildung.}$$

Bei Existenz einer Rückwärtsfortsetzung sei analog

$$\gamma_\theta(U_0) := \{ u(n) / n \in \mathbb{Z} \} \subset X_\theta \quad : \text{Orbit von } u_0 \quad \text{und}$$

$$\omega_\theta(u_0) = \omega_\theta(U_0) := \{ v \in X_\theta / \exists\, n_k \to \infty \text{ mit } u(n_k) \to v \} \subset X_\theta$$

die ω-Limesmenge von u_0, falls $u(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Natürlich gilt für alle $\theta \in S^1$: $\omega_\theta(u_0) = \omega(\theta_0,u_0) \cap X_\theta$.

Analog zur ω-Limesmenge für positive Zeit sei die α-Limesmenge für negative t definiert.

§2 Ergebnisse

Die beiden folgenden Sätze 1.1 und 1.2 enthalten die Ergebnisse dieser Arbeit.

1.1 Satz :

Sei $U(\cdot)$ eine beschränkte Lösung von (1.1) (G) oder (1.1) (P), wobei f die oben genannten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfülle, d.h., $f \in C^2$ bei periodischen und Dirichlet, bzw. analytisch bei gemischten und Neumann Randbedingungen.
Bei periodischen Randbedingungen sei f zusätzlich $O(2)$ äquivariant, d.h.,

$$f(\theta,u,p) = f(\theta,u,-p) \quad \text{und } f \text{ unabhängig von } x \in S^1.$$

Dann besteht $\omega(U_0)$ aus genau einem Orbit $\gamma(V_0)$, und $V(\cdot)$ hat Periode 1. □

1.2 Satz :

Sei $U(\cdot)$ eine Lösung von (1.1) (P), wobei $f \in C^2$ und SO(2) äquivariant sei, d.h., $f = f(\theta,u,p)$ ist unabhängig von $x \in S^1$. Außerdem sei $\gamma(U_0)$ beschränkt.

Dann gilt :

$\omega_\theta(u_0) \subset \{\sigma_a v_0 / a \in S^1\} \cong S^1$ und $\exists\, r \in S^1$, so daß die Poincare-Abbildung auf $\{\sigma_a v_0 / a \in S^1\}$ gegeben ist durch : $\sigma_a v(n) = \sigma_{a+n\cdot r} v_0$.

Insbesondere ist dann für r irrational $\omega_\theta(u_0) = \{\sigma_a v_0 / a \in S^1\}$ mit ergodischer Poincare-Abbildung.

Dabei ist $(\sigma_a v)(x) := v(x + a)$ für alle x. □

Diese beiden Sätze werden in Kapitel II resp. III bewiesen. Die wichtigsten Hilfsmittel werden die im nächsten Paragraphen definierten Abbildungen z und Π sein.

§3 Die Abbildungen z und Π

Definition :

(i) $z : X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$: "Nullstellenanzahl"

$z(\varphi) := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \{ \forall\, i \le n \;\; \exists\, x_i \in \Omega$ so daß gilt : $\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_{i+1}) < 0 \}$

wobei $z(\varnothing) := 0$.

(ii) sei $x_0 \in \Omega$ fest.

$\Pi_{x_0} : \; S^1 \times X \;\to\; S^1 \times \mathbb{R}^2$ stetig

$(\theta,u) \;\mapsto\; (\theta, u(x_0), u_x(x_0))$

Man beachte, daß X in $C^1(\Omega)$ einbettet und deshalb u_x klassisch existiert.

(iii) $S := \{ \varphi \in C^1(\Omega) / \varphi$ hat in Ω nur einfache Nullstellen $\}$

$z(\cdot)$ ist unterhalbstetig und für $\varphi \in S$, $\varphi_k \to \varphi$ in C^1 folgt $z(\varphi_k) \to z(\varphi)$.

□

1.3 Lemma :

Es sei $w(\cdot)$ Lösung von : $w_t = w_{xx} + a(t,x)\, w_x + b(t,x)\, w \qquad x \in (0,1)$

mit $a,\ a_t,\ a_x,\ b \in L^{\infty}_{loc}$ bei Dirichlet und periodischen Randbedingungen,
und a,b analytisch bei gemischten und Neumann Randbedingungen.

Dann gilt :

(i) $z(w(t)) < \infty \qquad$ für $t > 0$

(ii) $z(w(\cdot))$ ist monoton fallend und rechtsstetig

(iii) $\lim\limits_{t \uparrow t_0} z(w(t)) = z(w(t_0)) \quad$ für $t_0 > 0 \qquad \Leftrightarrow$
$w(t) = 0 \quad \forall\, t \qquad$ oder $\qquad w(t_0) \in S$

(iv) $z(w(\cdot))$ fällt nur endlich oft □

Beweis:

Für Dirichlet und periodische Randbedingungen siehe [Angenent].
Betrachte also gemischte und Neumann Bedingungen.
Da a und b analytisch sind, ist eine Lösung w(t,x) der PDE ebenfalls analytisch in
$[\sigma,1] \times [0,1]$ für alle $\sigma \in (0,1)$, siehe [Henry : 3.5 exc. 2, 3.4.6] und
[Komatsu : Theorem 1], also folgt (i).
Für den Beweis der restlichen Behauptungen ist es ausreichend folgendes zu zeigen :
Ist (t_0,x_0) mehrfache Nullstelle von w(t,x) , dann fällt z(w(t)) strikt bei $t = t_0$.

Falls $x_0 \in (0,1)$ folgt diese Behauptung wie in [Angenent & Fiedler : Theorem 5.1].
Für $x_0 \in \{0,1\}$ besteht die Schwierigkeit, daß z nur Nullstellen aus [0,1] sieht.
Es bezeichnen α,β die Koeffizienten in den Randbedingungen bei x_0.
Sei also :

(*) $\qquad w(t_0,x_0 + y) = c \cdot y^k + O(y^{k+1}) \qquad$ wobei $k \geq 2$, $c \neq 0$.

Wie in [Angenent & Fiedler] erhält man die folgenden Fälle :

$k = 2l$ gerade :

Die Nullstellen von $w(t_0 + s, x_0 + y)$ haben die Form $s = \sigma_j(y)\, y^2 \quad j = 1,\ldots,l$
mit $\sigma_j(0) < 0$, also folgt die Behauptung.

$k = 2l + 1$ ungerade :

Für $\beta = 0$ sind dann alle Lösungskurven bis auf den Ast $y = 0$ von der obigen Form und die Behauptung folgt (vgl. [Angenent & Fiedler]).

Sei also $\beta \neq 0$.

$w(t_0 + s, x_0 + y) = \Sigma\, w_{m,n}\, y^m\, s^n$ sei die Taylorentwicklung.

Die Aussage von [Angenent & Fiedler : Lemma 5.2] ist dann :

(**) $\quad \partial_t^m\, w(t_0, x_0 + y) = C \cdot y^{k-2m} + O(y^{k-2m+1}) \quad$ für $2m \leq k \quad$ mit $C \neq 0$.

Daraus folgt $\quad w_{0,n} = 0 \quad \forall\, n \leq 1 \quad$ wegen (*).

Außerdem ist wegen der Randbedingung

$\alpha \cdot w(t_0 + s, x_0) + \beta \cdot w_x(t_0 + s, x_0) = 0 \quad \forall\, s > 0$, daß heißt, $\alpha \cdot w_{0,n} + \beta \cdot w_{1,n} = 0 \quad \forall\, n$,

insbesondere folgt $\quad w_{1,n} = 0 \quad$ für $\quad n \leq 1$; aber im Widerspruch dazu ist

$w_{1,1} = \text{const.} \neq 0 \quad$ wegen (**). Dieser Fall tritt daher nicht auf. QED

1.4 Lemma :

Seien $U^1(\cdot)$, $U^2(\cdot)$ Lösungen von (1.1) mit $U^1(0)$, $U^2(0) \in X_\theta$.

Dann erfüllt $\varphi := u^1 - u^2$ die Voraussetzungen von Lemma 1.3. □

Beweis :

Mit $U^i(t) = (\theta^i(t), u^i(t)) \quad$ für $i = 1,2 \quad$ ist $\quad \theta^1(t) = \theta^2(t) = \theta(t) \quad$ wegen $U^1(0), U^2(0) \in X_\theta$.

Also gilt $\quad f(\theta^1(t), x, u^1(t), u^1_x(t)) - f(\theta^2(t), x, u^2(t), u^2_x(t)) =$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(\theta(t), x, u^2(t,x) + \tau\,\varphi(t,x), u^2_x(t) + \tau\,\varphi_x(t,x))\, d\tau \cdot \varphi_x(t,x) +$$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(\theta(t), x, u^2(t,x) + \tau\,\varphi(t,x), u^2_x(t) + \tau\,\varphi_x(t,x))\, d\tau \cdot \varphi(t,x) \quad =:$$

$$a(t,x)\,\varphi + b(t,x)\,\varphi_x$$

mit $\quad \varphi = u^1 - u^2$.

a und b erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1.3. Für gemischte und Neumann Bedingungen folgt dies aus [Henry : 3.5 exc. 2 und 3.4.6] und

[Komatsu : Theorem 1], für die anderen Randbedingungen aus $f \in C^2$ und $u^i(t) \in C^1$.

QED

1.5 Corollar :

Seien $U^1(\cdot)$, $U^2(\cdot)$ Lösungen von (1.1) mit $U_0^1, U_0^2 \in X_\theta$.

Dann gilt :

(i) $z(u^1(t) - u^2(t)) < \infty$ für alle $t > 0$

(ii) $z(u^1(\cdot) - u^2(\cdot))$ ist monoton fallend und rechtsstetig

(iii) $\Pi(u^1(t_0)) = \Pi(u^2(t_0)) \Rightarrow z(u^1(t) - u^2(t))$ fällt bei $t = t_0$ strikt oder $u^1(t) = u^2(t) \quad \forall\, t$

(iv) $z(u^1(t) - u^2(t))$ fällt nur endlich oft

(v) $(u^1(t_0) - u^2(t_0)) \in S \Rightarrow$ z lokal constant um $(u^1(t_0) - u^2(t_0))$ in $X_{\theta+t_0}$ □

Beweis :

Siehe Lemmata 1.3 und 1.4 . QED

Sei ab jetzt $U(\cdot)$ eine fest gewählte Lösung von (1.1) mit einer der genannten Randbedingungen und $\gamma^+(U_0)$ beschränkt in X.

Dann existiert die ω-Limesmenge von U_0 und sie ist nichtleer, kompakt, invariant und zusammenhängend (siehe z.B. [Henry : chapt. 4]). □

1.6 Lemma :

Es sei $V_0 \in \omega(U_0)$.

Dann gilt : $\Pi_{x_0} :$ clos $\gamma(V_0) \to S^1 \times \mathbb{R}^2$ ist injektiv $\forall\, x_0 \in \Omega$ □

Beweis : (indirekt)

Angenommen es existieren $V_0^i \in$ clos $\gamma(V_0)$ für $i = 1,2$ mit $\Pi(V_0^1) = \Pi(V_0^2)$ und $V_0^1 \neq V_0^2$. Dann ist insbesondere $\theta_0^1 = \theta_0^2 =: \theta$, also fällt $z(v^1(t) - v^2(t))$ bei $t = 0$ strikt.

Da z nur endlich oft fällt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(v^1(\pm\varepsilon) - v^2(\pm\varepsilon)) \in S$.

Da außerdem $V_0^i \in$ clos $\gamma(V_0)$ für $i = 1,2$ gibt es ein $t_0 > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$V(t_0 \pm \varepsilon), V(t_0 + n_0 \pm \varepsilon) \in X_\theta$, $(V(t_0 \pm \varepsilon) - V(t_0 + n_0 \pm \varepsilon)) \in S$ und

$$z(v(t_0 + n_0 \pm \varepsilon) - v(t_0 \pm \varepsilon)) = z(v^1(\pm\varepsilon) - v^2(\pm\varepsilon)).$$

Weiter ist $V_0 \in \omega(U_0)$, es existiert also eine Folge t_k mit $U(t_k) \in X_\theta$, $t_k \to \infty$ und $U(t_k) \to V_0$ für $k \to \infty$.

Wegen Corollar 1.5 (v) existiert dann ein k_0, so daß für alle $k > k_0$ gilt :

$$z(u(t_k + t_0 + n_0 \pm \varepsilon) - u(t_k + t_0 \pm \varepsilon)) =$$
$$z(v(t_0 + n_0 \pm \varepsilon) - v(t_0 \pm \varepsilon)) = z(v^1(\pm\varepsilon) - v^2(\pm\varepsilon)).$$

Folglich fällt $z(u(t + n_0) - u(t))$ unendlich oft im Widerspruch zu Corollar 1.5. QED

II. Gemischte Randbedingungen und periodische mit O(2) - Symmetrie

In diesem Abschnitt wird Satz 1.1 bewiesen. Die Beweisidee ist wie folgt :
Zuerst wird in §§ 1, 2 für (P) mit O(2)-Symmetrie resp. (G) gezeigt, daß die Projektion Π_{x_0} für ein geeignetes x_0 injektiv als Abbildung von clos $\gamma(V_0)$ nach $S^1 \times \mathbb{R}^1$ ist für alle $V \in \omega(U_0)$. Daraus erhält man in §3 die Injektivität von Π_{x_0} auf $\omega(U_0)$, so daß $\omega(U_0)$ nur aus periodischen Lösungen bestehen kann. Schließlich folgt in §4 noch die Eindeutigkeit dieser Lösung. □

§1 Periodische Randbedingungen

(2.1)
$$u_t = u_{xx} + f(\theta,u,u_x) \qquad x \in S^1$$
$$\theta_t = 1 \qquad \theta \in S^1$$

wobei $f(\theta,u,p) = f(\theta,u,-p)$ □

Dann ist (2.1) äquivariant unter der folgenden O(2) Aktion :

$(\sigma_a v)(x) := v(x + a)$: Drehung

$(\rho_a v)(x) := v(2a - x)$: Spiegelung

mit $a, x \in (\mathbb{R}^1 \bmod 1) \cong S^1$ und $v \in X$.
Es sei $\Sigma v := \{\sigma_a v / a \in S^1\}$ der Orbit von V unter der SO(2) Aktion.
Analog ist die Wirkung von σ_a und ρ_a auf Elemente aus $S^1 \times X$, nämlich nur auf die zweite Komponente, definiert.
Insbesondere sind mit V(•) auch $(\sigma_a V(\cdot))$ und $(\rho_a V(\cdot))$ Lösungen von (2.1) und mit V_0 sind $\sigma_a V_0$ und $\rho_a V_0$ Elemente von X_θ. □

2.1 Lemma [Chen] :
Sei U(•) Lösung von (2.1) mit $\gamma^+(U_0)$ beschränkt.
Dann existiert für alle $x_0 \in S^1$: $\lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} u_x(t,x_0)$ □

Beweis : (indirekt)

Sei $x_0 \in S^1$, so daß $\lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} u_x(t,x_0)$ nicht existiert. O.B.d.A. existieren dann Folgen $t_k, s_k \to \infty$ mit $\operatorname{sgn} u_x(t_k,x_0) = 1$ und $\operatorname{sgn} u_x(s_k,x_0) = 0 \ \forall\, k$.

Dann fällt $z(\rho_{x_0}u(t) - u(t))$ bei $t = s_k \ \forall\, k$, denn

$$(\rho_{x_0}u(t))(x_0) = u(t,2x_0 - x_0) = u(t,x_0) \qquad \text{und}$$

$$\operatorname{sgn} u_x(s_k,x_0) = \operatorname{sgn} u_x(s_k,2x_0 - x_0) = -\operatorname{sgn} (\rho_{x_0}u)_x(s_k,x_0) = 0$$

d.h., $(\rho_{x_0}u(t) - u(t))$ hat bei $x = x_0$ eine mehrfache Nullstelle.

Außerdem ist $\rho_{x_0}u(\cdot) \neq u(\cdot)$ denn $\operatorname{sgn} u_x(t,x) = -\operatorname{sgn} (\rho_{x_0}u)_x(t,x)$ und für $t = t_k$ ist $\operatorname{sgn} u_x(t_k,x_0) = 1 \neq 0$.

Also fällt $z(\rho_{x_0}u(t) - u(t))$ unendlich oft im Widerspruch zu Corollar 1.5 (iv). QED

2.2 Lemma :

Sei $U(\cdot)$ eine Lösung von (2.1) mit $\gamma^+(U_0)$ beschränkt.

Dann existiert ein $x_0 \in S^1$ mit $v_x(t,x_0) = 0 \ \forall\, t$ und $\forall\, V \in \omega(U_0)$. □

Beweis :

Falls ein $x_0 \in S^1$ existiert mit $\lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} u_x(t,x_0) = 0$ ist das Lemma bewiesen.

Sei also $\lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} u_x(t,x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in S^1$ (die Limites existieren nach Lemma 2.1).

Es sei $A^{\pm} := \{\, x_0 \in S^1 \,/\, \lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} u_x(t,x_0) = \pm 1\}$. Beide Mengen sind nicht leer und $A^+ \cup A^- = S^1$ (sonst wäre $v(\cdot) \equiv \text{const.} \ \forall\, V \in \omega(U_0)$ und das Lemma bewiesen).

Dann ist wegen des Zusammenhangs der S^1 eine der Mengen A^+ bzw. A^- nicht abgeschlossen, o.B.d.A. sei dies A^+. Also existiert eine Folge x_k mit $x_k \in A^+$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in A^-$.

Dann gilt für dieses x_0 : $\operatorname{sgn} v_x(x_0) = 0 \quad \forall\, V \in \omega(U_0)$.

Denn sei V_0 aus $\omega(U_0)$ mit $\operatorname{sgn} v_x(x_0) \neq 0$. Wegen $x_0 \in A^-$, $\lim_{k\to\infty} u(t_k) = v$ für eine Folge $t_k \to \infty$, und $\lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} u_x(t,x_0) = -1$ ist dann $\operatorname{sgn} v_x(x_0) = -1$.

Also existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt : $\operatorname{sgn} v_x(x) = -1 \qquad \forall\, x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Andererseits ist $x_k \in U_\varepsilon(x_0)$ für k hinreichend groß und $\lim_{t\to\infty} \operatorname{sgn} u_x(t,x_k) = 1$,

d.h., wie oben $\operatorname{sgn} v_x(x_k) \geq 0$. Widerspruch ! QED

2.3 Corollar :

Sei U(•) eine Lösung von (2.1) mit $\gamma^+(U_0)$ beschränkt.

Dann existiert ein x_0 mit :

$$\Pi_{x_0}: \quad \operatorname{clos}\gamma(V_0) \to S^1 \times \mathbb{R} \qquad \text{ist injektiv} \quad \forall\, V \in \omega(U_0)$$
$$(\theta, w \mapsto (\theta, w(x_0))$$

□

Beweis :

Sei x_0 wie in Lemma 2.2 gewählt. Dann ist Π_{x_0} injektiv als Abbildung nach $S^1 \times \mathbb{R}^2$ wegen Lemma 1.6 und nach Lemma 2.2 verschwindet die dritte Komponente für alle $V \in \omega(U_0)$, d.h. $\operatorname{Im} \Pi_{x_0} \subset S^1 \times \mathbb{R}$. QED

§2 Gemischte Randbedingungen

(2.2) $\qquad u_t = u_{xx} + f(\theta, x, u, u_x) \qquad x \in (0,1)$

$\qquad\qquad \theta_t = 1 \qquad\qquad \theta \in S^1$

mit $\qquad \alpha_0 \cdot u(t,0) + \beta_0 \cdot u_x(t,0) = 0 \qquad \alpha_1 \cdot u(t,1) + \beta_1 \cdot u_x(t,1) = 0$

$\forall\, t > 0 \quad$ und $\quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ für $i = 0,1$ □

Sei $x_0 = 0$, $U_0 \in S^1 \times X$ mit $\gamma^+(U_0)$ beschränkt.

Dann ist $\Pi_0 : \operatorname{clos}\gamma(V_0) \to S^1 \times \mathbb{R}^2$ injektiv $\forall\, V \in \omega(U_0)$.

Betrachte jetzt : $\quad Rd : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Isomorphismus

$$(x,y) \mapsto (\alpha_0 \cdot x - \beta_0 \cdot y\,,\ \beta_0 \cdot x + \alpha_0 \cdot y)$$

Wegen der Randbedingungen ist dann $Rd \circ \Pi_0 (\omega(U_0)) \subset S^1 \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

Also folgt :

2.4 Lemma :

Sei U(•) eine Lösung von (2.2) mit $\gamma^+(U_0)$ beschränkt.

Dann ist $\quad Rd \circ \Pi_0 : \operatorname{clos}\gamma(V_0) \to S^1 \times \mathbb{R}$ injektiv $\forall\, V \in \omega(U_0)$. □

§3 Injektivität von Π_{x_0} auf $\omega(U_0)$

Im folgenden werden die in den Lemmata 2.3 und 2.4 erhaltenen Abbildungen der Einfachheit halber mit Π bezeichnet. □

Definition :

Es sei $\quad \mathcal{E} := \{ P \in S^1 \times X \,/\, p(\cdot)$ ist eine periodische Lösung mit Periode 1 $\}$

$\mathcal{E}_\theta := \mathcal{E} \cap X_\theta$

d.h. $\quad P \in \mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; P(0) = P(1)$ in X_θ

und $\mathcal{E}_\theta$ besteht aus den Fixpunkten der Poincare-Abbildung ρ_θ. □

2.5 Lemma :

Es sei $V_0 \in \omega(U_0)$.

Dann gilt : $\quad \alpha(V_0), \omega(V_0) \subset \mathcal{E}$

und beide Limesmengen enthalten genau einen Orbit. □

Beweis :

Es sei ρ_θ die Poincare-Abbildung. Dann induziert die Einbettung $\Pi|_{\gamma_\theta(U_0)}$ eine Abbildung $\tilde{\rho}_\theta$ auf $\operatorname{Im}\Pi \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \gamma_\theta(V_0) & \xrightarrow{\rho_\theta} & \gamma_\theta(V_0) \\ \text{inj.}\downarrow & & \downarrow\text{inj.} \\ \operatorname{Im}\Pi & \xrightarrow{\tilde{\rho}_\theta} & \operatorname{Im}\Pi \end{array}$$

$\tilde{\rho}_\theta$ ist dann als eine auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definierte Abbildung streng monoton, denn $\tilde{\rho}_\theta$ ist die Einschränkung des Flusses auf $\operatorname{Im}\Pi|_{\gamma(U_0)} \subset S^1 \times \mathbb{R}$.

Da clos $\gamma(V_0)$ kompakt ist, ist es auch $\Pi(\text{clos}\ \gamma(V_0))$. Daraus folgt dann unmittelbar das Lemma. QED

2.6 Lemma :

Es existiert ein z_0 aus $\mathbb{N}_0$ mit : $z(v - p) = z_0$

$\forall\, V \in \omega_\theta(U_0)$ und $\forall\, P \in \epsilon_\theta \cap \omega_\theta(U_0)$ mit $P \neq V$. □

Beweis :

Nach Lemma 2.5 ist ϵ_θ nicht leer.

Sei also $P \in \epsilon_\theta \cap \omega_\theta(U_0)$ und

$z_P := \lim_{n\to\infty} z(u(n) - p) = \lim_{n\to\infty} z(u(n) - p(n))$ wobei o.B.d.A. $U_0 \in X_\theta$.

Es ist dann ausreichend, zu zeigen, daß z_P unabhängig von P ist.

Seien also $P_1, P_2 \in \epsilon_\theta \cap \omega_\theta(U_0)$ mit $P_1 \neq P_2$. Es ist dann $(p_1 - p_2) \in S$,

da P_1, P_2 1-periodische Funktionen sind und $z(p_1(t) - p_2(t))$ nur endlich oft fällt.

Folglich existieren $n,m \in \mathbb{N}_0$ hinreichend groß mit :

$$z_{P_2} = z(u(n) - p_2) = z(p_1 - p_2) = z(p_1 - u(m)) = z_{P_1}.$$ QED

2.7 Lemma : $\Pi : \omega(U_0) \to S^1 \times \mathbb{R}$ ist injektiv. □

Beweis :

Wegen Corollar 1.5 (iii) ist es ausreichend, folgende Behauptung zu zeigen :

$$z(v_0^1 - v_0^2) = z_0$$

$\forall\, V_0^1, V_0^2 \in \omega_\theta(U_0)$ mit $V_0^1 \neq V_0^2$ und $\theta \in S^1$ beliebig.

Seien also $V_0^1, V_0^2 \in \omega_\theta(U_0)$ mit $V_0^1 \neq V_0^2$ und $z(v_0^1 - v_0^2) \neq z_0$. Insbesondere sind dann $V_0^1, V_0^2 \notin \epsilon$ und damit $(v_0^i - p) \in S$ für alle p aus ϵ_θ wegen Lemma 2.6.

Dann gibt es folgende Fälle :

1. $z(v_0^1 - v_0^2) > z_0$

O.B.d.A. sei $z(v^1(t) - v^2(t))$ lokal constant bei $t = 0$. Dann existiert eine Folge

$t_n \to \infty$ mit $u(t_n) \in X_\theta$, $0 < (t_{n+1} - t_n) \to \infty$ für $n \to \infty$ und $\lim_{n\to\infty} u(t_n) = v_0^1$.

Sei $\tau_n := -(t_{n+1} - t_n)$. Da $\tau_n \to -\infty$ für $n \to \infty$ und $\alpha(V_0^2) = \gamma(P_0)$ für ein $P_0 \in \epsilon_\theta$

gilt o.B.d.A.: $$p_0 = \lim_{n\to\infty} v^2(\tau_n).$$

Für n hinreichend groß folgt dann mit Corollar 1.5 (ii) :

$$z(v_0^1 - v_0^2) = z(u(t_{n+1}) - v_0^2) \leq z(u(t_{n+1} + \tau_n) - v^2(\tau_n)) =$$
$$z(u(t_n) - v^2(\tau_n)) = z(v_0^1 - p_0) = z_0$$

im Widerspruch zur Annahme $z(v_0^1 - v_0^2) > z_0$.

2. $z(v_0^1 - v_0^2) < z_0$

Diesen Fall beweist man analog zum ersten :

Betrachte $\tau_n := (t_{n+1} - t_n) \to \infty$ für $n \to \infty$.

O.B.d.A. gilt wieder $p_0 = \lim_{n\to\infty} v^2(\tau_n)$ mit $P_0 \in \epsilon_\theta$.

Für n hinreichend groß folgt wie oben :

$$z(v_0^1 - v_0^2) = z(u(t_n) - v_0^2) \geq z(u(t_n + \tau_n) - v^2(\tau_n)) =$$
$$z(u(t_{n+1}) - v^2(\tau_n)) = z(v_0^1 - p_0) = z_0$$

im Widerspruch zu $z(v_0^1 - v_0^2) < z_0$. QED

2.8 Proposition :

Es gilt : $\omega(U_0) \subset \epsilon$.

Die ω-Limesmengen bestehen also nur aus periodischen Orbits der Anregungsperiode 1. □

Beweis :

Wegen Lemma 2.7 wird $\omega_\theta(U_0)$ nach $\mathbb{R}$ eingebettet und wie im Beweis von Lemma 2.5 folgt, daß die Poincare-Abbildung $\tilde{P}_\theta$ streng monoton ist.

Falls ein nicht stationärer Orbit $\gamma_\theta(V)$ von $\tilde{P}_\theta$ in $\Pi(\omega_\theta(U_0))$ existiert, würde es ein nichttriviales Repellor-Attraktor Paar in $\omega_\theta(U_0)$ geben; im Widerspruch dazu ist aber $\omega_\theta(U_0)$ chain-recurrent (siehe [Conley : 6.2.A und 6.2.C]).

Betrachte nämlich

$A = \{ x \geq \Pi(\alpha_\theta(W)) \} \cap \Pi(\omega_\theta(U_0))$ und $A^* = \{ x \leq \Pi(\omega_\theta(W)) \} \cap \Pi(\omega_\theta(U_0))$,

wobei o.B.d.A. $\tilde{P}_\theta$ streng monoton steigend sei. Dann sind A und A^* invariant, denn $\Pi(\alpha_\theta(W))$ und $\Pi(\omega_\theta(W))$ sind Fixpunkte von $\tilde{P}_\theta$ (siehe Lemma 2.5), und A, A^* bilden ein Attraktor-Repellor Paar in $\Pi(\omega_\theta(U_0))$ wegen der Monotonie von $\tilde{P}_\theta$.

QED

§4 Eindeutigkeit

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß $\omega(U_0)$ aus genau einem Orbit besteht. □

2.9 Periodische Randbedingungen :

Betrachtet wird zuerst (2.1).
Aus Satz 1.2, der unabhängig von Satz 1.1 in Kapitel III bewiesen wird, folgt, daß $\omega_\theta(U_0) \subset \Sigma V$ für ein $V \in \omega_\theta(U_0)$.
Falls $\omega_\theta(U_0)$ mehr als ein Element enthält, muß ein ganzes offenes Bogenelement $\Gamma \subset \{\sigma_a(v) \,/\, a \in S^1\} \cong S^1$ darin enthalten sein, da $\omega(U_0)$ zusammenhängend ist.
Sei o.B.d.A. $V \in \Gamma$, d.h., es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\sigma_a(v) \in \omega_\theta(U_0) \;\forall\, a \in U_\varepsilon(0)$.
Weiter gilt wegen Lemma 2.2 : $w_x(x_0) = 0 \quad \forall\, W \in \omega_\theta(U_0)$.
Dann ist aber $v_x(x_0 + a) = (\sigma_a(v))_x(x_0) = 0 \quad \forall\, a \in U_\varepsilon(0)$,
also $v(x) = \text{const.} \quad \forall\, x \in U_{\varepsilon/2}(0)$.
Daraus folgt aber, daß $\Pi_{x_0}(\sigma_a(v)) = \text{const.}$ ist für alle $a \in U_{\varepsilon/2}(0)$ im Widerspruch zu Lemma 2.7.
Also enthält $\omega_\theta(U_0)$ genau ein Element. QED

2.10 Gemischte Randbedingungen :

Betrachte jetzt (2.2).
Angenommen $\omega_\theta(U_0)$ enthielte mehr als ein Element. Da $\omega(U_0)$ zusammenhängend ist, gibt es dann drei paarweise verschiedene Elemente V^1, V^2, V^3 in $\omega_\theta(U_0)$.

1. $\beta_0 \neq 0$ (gemischte und Neumann Bedingungen) :
Dann existiert für alle $V \in \omega_\theta(U_0)$ ein $t_*(V)$ mit $u(t,0) \neq v(t,0) \;\forall\, t > t_*(V)$.
Sonst würde nämlich $z(u(t) - v(t))$ unendlich oft fallen imWiderspruch zu Corollar 1.5 (iv), denn aus den Randbedingungen und $\beta_0 \neq 0$ folgt aus $u(t,0) = v(t,0)$ auch $u_x(t,0) = v_x(t,0)$ und wegen Corollar 1.5 (iii) fällt $z(u(t) - v(t))$ dann strikt.
O.B.d.A. sei jetzt $v^1(0) < v^2(0) < v^3(0)$. Dann wechselt aber $(u(t,0) - v^2(t,0))$ unendlich oft das Vorzeichen imWiderspruch zu der oben stehenden Aussage.
Also enthält $\omega_\theta(U_0)$ in diesem Fall nur ein Element.

2. $\beta_0 = 0$ (Dirichlet Bedingungen) :

Es ist also jetzt $v(t,0) = 0 \quad \forall\, V \in \omega_\theta(U_0)$.

Aus den gleichen Gründen wie im ersten Fall ist dann $u_x(t,0) \neq v_x(t,0) \quad \forall\, t > t_*(V)$.

O.B.d.A. sei $v_x^1(0) < v_x^2(0) < v_x^3(0)$ und wie oben erreicht man einen Widerspruch, da $(u_x(t,0) - v_x^2(t,0))$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt.

QED

Beweis von Satz 1.1 :

Satz 1.1 folgt jetzt aus Proposition 2.8 und Abschnitt 2.9 resp. 2.10. QED

2.11 Bemerkung :

Proposition 2.8 folgt für periodische Randbedingungen auch leicht aus Satz 1.2, indem man geeignete Rotationen einer Lösung betrachtet und die O(2)-Symmetrie der Gleichung (1.1) (P) ausnützt.

Für den Beweis der Eindeutigkeit in Abschnitt 2.9 wird aber die Konstruktion in §3, d.h. die Injektivität von Π auf $\omega(U)$, benötigt. □

III. Periodische Randbedingungen mit SO(2) - Symmetrie

Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis von Satz 1.2.
Der Beweis orientiert sich stark an [Matano 2], wo dasselbe Problem mit zeitunabhängigem f behandelt wird. □

Betrachtet wird die folgende Gleichung :

(3.1) $u_t = u_{xx} + f(\theta,u,u_x)$ $\qquad x \in S^1$

$\theta_t = 1$ $\qquad \theta \in S^1$

wobei $f = f(\theta,u,p)$ unabhängig von x ist. □

Dann ist (3.1) äquivariant unter der folgenden SO(2) Aktion :

$(\sigma_a v)(x) := v(x + a)$: Drehung

mit $a,x \in (\mathbb{R}^1 \bmod 1) \cong S^1$ und $v \in X$ (siehe Kapitel II §1).
Weiter sei $\Sigma v := \{\sigma_a v / a \in S^1\}$ der Orbit von V bzgl. der SO(2) Aktion und
$\Sigma_v := \{a \in S^1 / \sigma_a v = v\}$ die Isotropiegruppe von V. □

§1 $\gamma(V) \subset \Sigma V$

3.1 Lemma :
Sei $V_0 \in \omega_\theta(U_0)$
und es existiere ein $a \in S^1$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $(v_0 - \sigma_a v(n_0)) \notin S$.
Dann gilt : $v_0 = \sigma_a v(n_0)$. □

Beweis : (indirekt)
Es sei $v_0 \neq \sigma_a v(n_0)$.
Dann fällt $z(v(t) - \sigma_a v(n_0 + t))$ strikt bei $t = 0$ wegen Corollar 1.5 (iii).
Weiter sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $z(v(\pm\varepsilon) - \sigma_a v(n_0 \pm \varepsilon))$ lokal constant ist.

Da $V_0 \in \omega_\theta(U_0)$, existiert eine Folge $t_k \to \infty$ mit $U(t_k) \in X_\theta$ und $\lim_{k\to\infty} u(t_k) = v_0$.

Dann gilt auch $\sigma_a u(t_k + n_0 \pm \varepsilon) \to \sigma_a v(n_0 \pm \varepsilon)$ für $k \to \infty$.
Für k hinreichend groß, folgt dann mit Corollar 1.5 (v) :

$$z(u(t_k \pm \varepsilon) - \sigma_a u(t_k + n_0 \pm \varepsilon)) = z(v(\pm \varepsilon) - \sigma_a v(n_0 \pm \varepsilon)),$$

und $z(u(t) - \sigma_a u(t + n_0))$ fällt unendlich oft, nämlich für $t = t_k \ \forall\, k$ hinr. groß
im Widerspruch zu Corollar 1.5 (iv). Folglich gilt : $v_0 = \sigma_a v(n_0)$. QED

3.2 Hilfssatz : [Matano 2]
Sei $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ beschränkt und gleichmäßig stetig.
Außerdem existiere $p > 0$ und $t_* > 0$,
so daß gilt : $h(t) \neq h(t + p) \quad \forall\, t > t_*$.
Dann existiert eine p-periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig,
mit $|h(t) - g(t)| \to 0$ für $t \to \infty$. □

Beweis :
Betrachte $h_k(x) := h(k \cdot p + x)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [0,p]$.
Dann ist h_k eine monotone, beschränkte Funktionenfolge für $k > k_*$, da
entweder $h(t + p) < h(t)$ oder $h(t + p) > h(t)$ für alle $t > t_*$ gilt wegen $h(t) \neq h(t + p)$.
Dann existiert der punktweise Limes $g(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x) \ \forall\, x \in [0,p]$,
mit $g(0) = g(p)$. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion h folgt leicht
die gleichmäßige Konvergenz der Folge h_k gegen g, und daraus das Lemma. QED

Definition :
Es sei im folgenden : $m(V) = m(v) := \max_{x \in S^1} v(x)$ für $V \in X_\theta$. □

3.3 Lemma :

Sei $V_0 \in \omega_\theta(U_0)$.

Dann folgt : $m(\sigma_a v(n)) = m(v)$ für alle $a \in S^1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. □

Beweis :

Für $n = 0$ ist das Lemma trivial.

Es existiere also ein $n_0 > 0$ und ein $a_0 \in S^1$ mit $m(\sigma_{a_0} v(n_0)) \neq m(v)$.

Diese Ungleichung gilt dann für alle $a \in S^1$, da $m(\sigma_a v)$ natürlich unabhängig von a ist. Aus Lemma 3.1 folgt :

$$(*) \qquad \begin{cases} (v - \sigma_a v(n_0)) \in S \\ z(v - \sigma_a v(n_0)) = z(v - \sigma_{a_0} v(n_0)) \end{cases} \quad \text{für alle } a \in S^1$$

Jetzt ist $V \in \omega_\theta(U_0)$, es existiert daher eine Folge $t_k \to \infty$ mit $U(t_k) \in X_\theta$ und $u(t_k) \to v$ für $k \to \infty$.

Wegen (*) und der Kompaktheit der S^1 gibt es ein $k_* > 0$ mit der Eigenschaft, daß

$$z(u(t_k) - \sigma_a u(t_k + n_0)) = z(v - \sigma_{a_0} v(n_0)) \qquad \forall\, a \in S^1 \text{ und für } k > k_*.$$

Da zusätzlich $z(u(t) - \sigma_a u(t))$ monoton fallend ist, folgt also :

$$z(u(t) - \sigma_a u(t + n_0)) = z(v - \sigma_{a_0} v(n_0)) \qquad \text{für } t > t_{k_*} \text{ und } a \in S^1.$$

Wegen Corollar 1.5 (iii) gilt daher $(u(t) - \sigma_a u(t + n_0)) \in S$ und insbesondere $m(u(t)) \neq m(\sigma_a u(t + n_0)) \;\forall\, t > t_{k_*}$ und $a \in S^1$.

Da $m(u(\cdot))$ beschränkt und gleichmäßig stetig ist, was aus der Kompaktheit von clos $\gamma^+(U_0)$ folgt, sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 3.2 erfüllt und man erhält die Konvergenz von $m(u(\cdot))$ gegen eine n_0-periodische Funktion für $t \to \infty$.

Dann folgt aber $m(v(n_0)) = m(v)$, da $\lim_{t \to \infty} |m(u(t)) - m(u(t + n_0))| = 0$,

also auch $m(\sigma_a v(n_0)) = m(v) \;\forall\, a \in S^1$ im Widerspruch zur Annahme.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

3.4 Lemma :

Sei $V_0 \in \omega_\theta(U_0)$.

Dann gelten folgende Aussagen :

(i) $\operatorname{clos} \gamma_\theta(V_0) \subset \Sigma V_0$.

(ii) $\exists\, r \in S^1$ mit $\quad W(n) = \sigma_{n \cdot r}\, W(0) \quad \forall\ n \in \mathbf{Z}$

für beliebiges $W \in \operatorname{clos} \gamma_\theta(V_0)$. □

Beweis :

Es ist ausreichend, (ii) zu beweisen, da $\Sigma V_0 \cong S^1$ abgeschlossen ist und $\gamma_\theta(V_0) \subset \Sigma V_0$ nach (ii).

Betrachte jetzt zum Beweis von (ii) zuerst v(1).

Aus Lemma 3.3 folgert man $m(v(1)) = m(v_0)$. Es gibt also ein $r \in S^1$ mit $(v(1) - \sigma_r v_0) \notin S$ und Lemma 3.1 liefert schließlich $v(1) = \sigma_r v_0$.

Also existiert ein $r \in S^1$ mit $v(1) = \sigma_r v_0 = \sigma_r v(0)$.

Mit vollständiger Induktion für $n > 0$ ergibt sich :

$$v(n+1) = \sigma_r v(n) = \sigma_r \sigma_{n \cdot r} v(0) = \sigma_{(n+1) \cdot r}\, v(0) = \sigma_{(n+1) \cdot r}\, v_0$$

wegen der Äquivarianz der Gleichung (3.1).

Damit folgt $\gamma_\theta(V_0) \subset \Sigma V_0$.

Für $w_0 = \sigma_a v_0$, d.h., für $W_0 \in \Sigma V_0$, folgt dann mit dem obigem Ergebnis :

$$w(n) = \sigma_a v(n) = \sigma_{a+n \cdot r}\, v(0) = \sigma_{n \cdot r}\, \sigma_a v(0) = \sigma_{n \cdot r}\, w_0.$$

Also ist (ii) und damit das Lemma bewiesen. QED

3.5 Corollar :

Es gilt :

(i) Die Poincare-Abbildung auf ΣV_0 ist periodisch bzw. ergodisch für r rational resp. irrational.

(ii) Aus r rational folgt $\quad \operatorname{clos} \gamma_\theta(V_0) = \gamma_\theta(V_0)$,

für r irrational ergibt sich $\quad \operatorname{clos} \gamma_\theta(V_0) = \Sigma V_0$.

(iii) $\bigcup_{t \in [0,1]} \Sigma V_0(t) \cong S^1 \times S^1$ besitzt dann einen periodischen bzw. ergodischen Fluß. □

Beweis :

Ergibt sich unmittelbar aus Lemma 3.4 und den Eigenschaften von Rotationen auf der S^1. QED

§2 $\omega_\theta(U) \subset \Sigma V$: Eindeutigkeit

3.6 Lemma :

Es seien $V_0^1, V_0^2 \in \omega_\theta(U_0)$.

Wenn ein $a_0 \in S^1$ existiert mit $(\sigma_{a_0} v_0^1 - v_0^2) \notin S$, dann ist $\sigma_{a_0} v_0^1 = v_0^2$. □

Beweis : (indirekt)

Sei $(\sigma_a v_0^1 - v_0^2) \notin S$ und $\sigma_a v_0^1 \neq v_0^2$.

Dann fällt also $z(\sigma_a v^1(t) - v^2(t))$ bei $t = 0$.

Wähle $1 > \varepsilon > 0$ so, daß $(\sigma_{a_0} v^1(-\varepsilon) - v^2(-\varepsilon)) \in S$ ist. Also ist :

(*) $$z(\sigma_a v^1(1-\varepsilon) - v^2(1-\varepsilon)) < z(\sigma_a v^1(-\varepsilon) - v^2(-\varepsilon)).$$

Seien jetzt r_1 und r_2 wie in Lemma 3.4 (ii) für v_0^1 resp. v_0^2 gewählt, d.h.,

(**) $$\begin{cases} \sigma_a v^1(n-\varepsilon) = \sigma_{a+n\cdot r_1} v^1(-\varepsilon) & \text{resp.} \\ v^2(n-\varepsilon) = \sigma_{n\cdot r_2} v^2(-\varepsilon) & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Es existiert jetzt eine Folge $n_k \geq 1$, $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} r_i \cdot n_k \to 0 \bmod 1 \qquad \text{für } i = 1,2$$

(wenn r_1, r_2 rational zueinander sind, ist das klar; für irrationales Verhältnis siehe [Cornfeld & Fomin & Sinai : 3.1 Lemma 1]).

Dann ergibt sich aus (**) :

$$\sigma_a v^1(n_k - \varepsilon) \to \sigma_a v^1(-\varepsilon) \qquad \text{für } k \to \infty$$
$$v^2(n_k - \varepsilon) \to v^2(-\varepsilon)$$

jeweils in $X_{\theta-\varepsilon}$ und wegen der Wahl von ε folgt dann für k hinreichend groß

$$z(\sigma_a v^1(n_k - \varepsilon) - v^2(n_k - \varepsilon)) = z(\sigma_a v^1(-\varepsilon) - v^2(-\varepsilon))$$

im Widerspruch zu (*). Also ist $\sigma_a v_0^1 = v_0^2$. QED

Definition :

Für $a \in S^1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei:

$$z(a,n) := \lim_{t\to\infty} z(u(t) - \sigma_a u(t+n))$$

$$z_0 := \min \{\, z(a,n) \,/\, a \in S^1, n \in \mathbb{N}_0 : z(a,n) > 0 \,\}$$

Dabei sei wieder $\min \varnothing := 0$. □

Es gilt $z_0 = 0$ genau dann, wenn u(t,x) constant ist. Dann ist aber $\gamma(U) = \{ U \}$.
Es sei also im folgenden stets $z_0 > 0$ vorausgesetzt. □

Im folgenden Lemma sind einige Eigenschaften von z(a,n) zusammengestellt.

3.7 Lemma :

Sei $V \in \omega_\theta(U_0)$. Ferner sei V nicht constant, d.h., Σ_V ist eine echte und damit endliche Untergruppe der S^1.

Dann gilt : (i) $z(v - \sigma_a v) \in \{ z(a,n), 0 \} \quad \forall\ a \in S^1, n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $z(\cdot,n) : S^1 \to \mathbb{N}_0$ ist oberhalbstetig bei a
sofern zusätzlich $z(a,n) > 0$ ist. □

Beweis :

Zuerst wird (i) bewiesen.

Sei zuerst $(v - \sigma_a v) \notin S$. Aus Lemma 3.1 folgt dann $v = \sigma_a v$, also $z(v - \sigma_a v) = 0$.

Für $(v - \sigma_a v) \in S$ folgt aber aus Corollar 1.5 (v), daß $z(v - \sigma_a v) = z(a,n)$, denn

$(u(t_k) - \sigma_a u(t_k + n)) \to (v - \sigma_a v)$ für $k \to \infty$ für eine Folge $t_k \to \infty$ mit $u(t_k) \in X_\theta$.

Zum Beweis von (ii) sei jetzt $a_0 \in S^1$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $z(a_0,n_0) > 0$ fest gewählt.

Wegen Corollar 1.5 existiert ein t_* mit

$$(u(t_*) - \sigma_{a_0} u(t_* + n_0)) \in S \quad \text{und} \quad z(a_0,n_0) = z(u(t_*) - \sigma_{a_0} u(t_* + n_0)).$$

Dann ist für a hinreichend nahe bei a_0 auch $z(u(t_*) - \sigma_a u(t_* + n_0)) = z(a_0,n_0)$.

Aus der Monotonie von z (Corollar 1.5 (ii)) folgt dann die Oberhalbstetigkeit.

QED

3.8 Lemma :

Sei $V \in \omega_\theta(U_0)$.

Dann gilt : $z(v - \sigma_a v) = z_0 \qquad \forall\ a \notin \Sigma_V$. □

Beweis :

Für $\Sigma_V = S^1$ ist die Behauptung des Lemmas leer. Sei also $\Sigma_V \neq S^1$.

Betrachte die folgende Abbildung (Δ bezeichne die Diagonale) :

$$\tilde{z} : \quad (\Sigma V \times \Sigma V) / \Delta \to \mathbb{N}_0 \qquad (v,w) \mapsto z(v - w)$$

Behauptung : $\tilde{z}$ ist constant.

Denn aus $(v,\sigma_a v) \in (\Sigma V \times \Sigma V) / \Delta$ folgt $(v - \sigma_a v) \in S$, d.h., $\tilde{z}$ ist lokal constant.

Außerdem hat $(\Sigma V \times \Sigma V) / \Delta \cong S^1 \times S^1 / \Delta$ genau zwei Zusammenhangskomponenten und $\tilde{z}$ ist kommutativ, woraus die Behauptung folgt.

Es sei $\tilde{z}((\Sigma V \times \Sigma V) / \Delta) = c$, wobei $c > 0$, da V nach Voraussetzung nicht constant ist.
Für $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sigma_a v(n) = \sigma_{a+n\cdot r} v$ mit r wie aus Lemma 3.4, also folgt :

$$(*) \qquad z(v - \sigma_a v(n)) = \begin{cases} 0 & \text{für } (a + n\cdot r) \in \Sigma_V \\ c & \text{für } (a + n\cdot r) \notin \Sigma_V \end{cases}$$

Lemma 3.7 (i) liefert daher $z(a,n) = c$ constant für alle a, n mit $(a + n\cdot r) \notin \Sigma_V$.
Da V nicht constant war, ist andererseits für n_0 fest

$$(**) \qquad \{\, a \in S^1 / (a + n_0\cdot r) \in \Sigma_V \,\} \quad \text{endlich.}$$

Wenn a_0 in dieser Menge enthalten ist, ist dann entweder $z(a_0,n_0) = 0$ oder $z(a_0,n_0) \geq z(a,n_0) > 0$ für alle a hinreichend nahe bei a_0 wegen Lemma 3.7 (ii), d.h., es ist $z(a_0,n_0) \geq c$, da die Menge in (**) endlich ist.
Daraus ergibt sich

$$c \leq z(a,n) \qquad \forall\, a \in S^1, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } z(a,n) \neq 0,$$

daß heißt, $c = z_0$. Setze in (*) $n = 0$ und das Lemma ist bewiesen. QED

3.10 Proposition :
Es existiert ein $V_0 \in \omega_\theta(U_0)$, so daß es für alle $W_0 \in \omega_\theta(U_0)$ ein $a \in S^1$ gibt mit :

$$w_0 = \sigma_a v_0 \qquad \text{d.h.} \qquad \omega_\theta(U_0) \subset \Sigma V_0 \qquad \square$$

Beweis : (indirekt)
(i) Es enthalte $\omega_\theta(U_0)$ nur constante Funktionen, d. h., $\Sigma_V = S^1 \;\forall\, V \in \omega_\theta(U_0)$.
Dann seien $V^1, V^2, V^3 \in \omega_\theta(U_0)$ paarweise verschieden (solche Elemente existieren wegen des Zusammenhangs von $\omega(U_0)$ nur dann nicht, wenn $\omega_\theta(U_0)$ aus genau einem Element besteht. Dann ist die Behauptung aber trivialerweise erfüllt).
O.B.d.A. gelte $v^1(t) > v^2(t) > v^3(t) \;\forall$ t. Dann fällt $z(u(t) - v^2(t))$ unendlich oft; wegen Corollar 1.5 (iv) besteht $\omega_\theta(U_0)$ also nur aus einem Element.

(ii) Es enthalte $\omega_\theta(U_0)$ ein nicht constantes Element V_0, d.h., $\Sigma_{V_0} \neq S^1$.
Wegen der Lemmata 3.1 und 3.9 existiert dann ein $a_0 \in S^1$ mit $(v - \sigma_{a_0} v) \in S$ und $z(v_0 - \sigma_{a_0} v_0) = z_0$. Falls die Aussage der Proposition nicht gilt, gibt es o.B.d.A. ein $W \in \omega_\theta(U_0) / \Sigma V_0$ mit $z(v_0 - \sigma_{a_0} w) = z_0$, denn $\omega_\theta(U_0) / \Sigma V_0$ ist offen und nach Voraussetzung nicht leer, außerdem ist $(v - \sigma_{a_0} v) \in S$.

Wegen Lemma 3.6 und $W \notin \Sigma V_0$ ist dann $(v_0 - \sigma_a w) \in S$ für alle $a \in S^1$, woraus $z(v_0 - \sigma_a w) = z_0$ folgt, da S^1 zusammenhängend ist.

Weiter existieren dann wegen der Kompaktheit der S^1 t_1, t_2 mit $u(t_1), u(t_2) \in X_\theta$, so daß gilt : $z(u(t_1) - \sigma_a u(t_2)) = z(v_0 - \sigma_a w) = z_0$ für alle $a \in S^1$.

O.B.d.A. sei $\tau = t_2 - t_1 > 0$ $(\tau \in \mathbb{N})$.

Daraus folgt $z(u(t) - \sigma_a u(t+\tau)) \le z_0$ für alle $t \ge t_1$, nach Definition von z_0 dann $z(u(t) - \sigma_a u(t+\tau)) = z_0 \ \forall\, t \ge t_1$ und somit $(u(t) - \sigma_a u(t+\tau)) \in S \ \forall\, t > t_1$; insbesondere erhält man $m(u(t)) \neq m(\sigma_a u(t+\tau)) \ \forall\, t > t_1$.

Hilfssatz 3.2 liefert dann die Existenz einer τ-periodischen Funktion g mit

$$\left| m(u(t)) - g(t) \right| \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

Es gibt aber eine Folge $t_k \to \infty$ mit $\lim_{k\to\infty} u(t_k) = V_0$ und $u(t_k) \in X_\theta$, und

man erhält $m(V(n)) = \lim_{k\to\infty} m(u(t_k + n)) \ \forall\, n \in \mathbf{Z}$ fest.

O.B.d.A. konvergiert $(t_k \bmod \tau)$ gegen ein $\tilde{\tau} \in \mathbb{N}$ für $k \to \infty$ mit $0 \le \tilde{\tau} < \tau$,

Dann ist also $\lim_{k\to\infty} \left| m(u(t_k + n)) - g(t_k + n) \right| = 0$ für alle n

und da $g(t_k + n) \to g(\tilde{\tau} + n)$ für $k \to \infty$ wegen der Periodizität von g, folgt daher :

$$m(v(n)) = g(\tilde{\tau} + n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen Lemma 3.3 ist m(v(n)) aber unabhängig von n, d.h. $g(\tilde{\tau} + n)$ ist constant und es folgt $\lim_{k\to\infty} m(u(\tilde{\tau} + k)) = \text{const.}$

und damit $m(v_0) = m(w)$.

Dies steht im Widerspruch zu $(v_0 - \sigma_a w) \in S \ \forall\, a \in S^1$ und Lemma 3.6. QED

Beweis von Satz 1.2 :

Satz 1.2 folgt aus Corollar 3.5 und Proposition 3.10 QED

Literaturverzeichnis :

S. Angenent
"The zero set of a solution of a parabolic equation"
J. reine angew. Math. 390 (1988), 79-96

S. Angenent & B. Fiedler
"The dynamics of rotating waves in scalar reaction diffusion equations"
Trans. Amer. Math. Soc. 307 (1988), 545 – 568

X.-Y. Chen
"Uniqueness of the ω-limit point of a semilinear heat equation on the circle"
Proc. Japan Acad. Sci., Ser. A 62 (1986), 335 – 337

X.-Y. Chen & H. Matano
"Convergence, asymptotic periodicity and finite point blow-up in one-dimensional heat equations"
J. Diff. Eq. 78 (1989), 160 – 190

C. Conley
"Isolated invariant sets and the Morse index"
Conf. Board Math. Sci. No. 38
Amer. Math. Soc. Providence 1978

I.P. Cornfeld & S.V. Fomin & Ya. G. Sinai
"Ergodic theory"
Grundlehren d. math. Wissenschaften 245
Springer 1982

B. Fiedler & J. Mallet-Paret
"A Poincare-Bendixson theorem for scalar reaction diffusion equations"
preprint

D. Henry
"Geometric theory of semilinear parabolic equations"
Lect. Notes Math. 804 Springer 1981

M.S. Jolly
"Explicit construction of an Inertial manifold for a scalar reaction diffusion equation"
J. Diff. Eq. 78 (1989), 220 – 262

G. Komatsu

"Analyticity up to the boundary of solutions of nonlinear parabolic equations"
Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 669 – 720

P. Massatt

preprint

H. Matano

1 "Convergence of solutions of one dimensional semilinear parabolic equations"
J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 221-227

2 "Asymptotic behavier of solutions of semilinear heat equations on S^1"
in "Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states"
W.-M. Ni & B. Peletier & J. Serrin (ed.)
Proc. Berkeley 1986

T.I. Zelenyak

"Stabilization of solutions of boundary value problems for a second order parabolic equation with one space variable"
Diff. Eq. 4,1 (1968), 17-22

□